Integral Mcshane Fungsi Bernilai Banach

Herry Pribawanto Suryawan

Jurusan Matematika
Universitas Sanata Dharma Yogyakarta
e-mail: herrypribs@staff.usd.ac.id

Abstrak

Integral McShane merupakan integral tipe Riemann yang termuat dalam integral Henstock-Kurzweil dan ekuivalen dengan integral Lebesgue. Di dalam makalah ini akan dibicarakan suatu perumuman integral McShane yaitu untuk fungsi bernilai pada ruang Banach. Selanjutnya diperhatikan sifat-sifat dasar dari integral ini termasuk kriteria Cauchy untuk keterintegralan, sifat kelinearan, dan lema Saks-Henstock.
Kata kunci: *integral McShane, partisi McShane, ruang Banach*

I. Pendahuluan

Salah satu dasar matematika analisis adalah teori integral dan salah satu jenis integral yang paling populer adalah integral Riemann. Telah diketahui bahwa integral Riemann mempunyai beberapa kekurangan dari sisi teoritis maupun aplikasinya. Integral Lebesgue lahir sebagai jawaban atas permasalahan ini dan menjadi integral standar yang dipakai oleh matematikawan maupun pengguna matematika. Sayangnya integral Lebesgue dikembangkan melalui konsep ukuran yang tidaklah mudah. Pada sekitar tahun 1960, J. Kurzweil dan R. Henstock secara independen menemukan suatu integral tipe Riemann yang disebut sebagai integral Henstock-Kurzweil dan ternyata integral ini memuat integral Newton, integral Lebesgue, dan integral Riemann tak wajar. Selanjutnya E.J. McShane melakukan sedikit modifikasi pada definisi integral Henstock-Kurzweil dan muncullah integral McShane. Integral McShane merupakan integral tipe Riemann yang termuat di dalam integral Henstock-Kurzweil dan ekuivalen dengan integral Lebesgue di dalam ruang Euklid.

Salah satu aspek penelitian terhadap berbagai jenis integral yang ada adalah memperumum domain maupun kodomain dari fungsi yang terkait. Di dalam makalah ini akan dibicarakan perumuman integral McShane untuk fungsi yang terdefinisi pada interval kompak di ruang Euklid R^m dan mempunyai nilai pada sebarang ruang Banach. Selanjutnya akan diperhatikan sifat-sifat dasar dari integral ini termasuk kriteria Cauchy untuk keterintegralan, sifat kelinearan, dan lema Saks-Henstock.

II. Definisi dan Sifat Dasar Integral McShane Fungsi Bernilai Banach

Pertama diberikan pengertian partisi McShane dan definisi integral McShane. Diberikan interval kompak $I=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_m,b_m]\subset R^m$, $m\geq 1$. Pasangan (I,t) yang

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional MIPA 2007 dengan tema **“Peningkatan Keprofesionalan Peneliti, Pendidik & Praktisi MIPA”** yang diselenggarakan oleh Fakultas MIPA UNY Yogyakarta pada tanggal 25 Agustus 2007

terdiri dari interval kompak $I \subset R^m$ dan titik $t \in R^m$ disebut interval dengan titik terkait, dan t disebut titik terkait dari I. Dua interval kompak $J, L \subset R^m$ dikatakan tak saling tumpang tindih (*nonoverlapping*) jika $\operatorname{int} J \cap \operatorname{int} L = \varnothing$ ($\operatorname{int} J$ menyatakan interior interval J). Koleksi berhingga $\{(I_j, t_j) : j = 1, \ldots, p\}$ dari interval-interval dengan titik terkait yang tak saling tumpang tindih disebut sistem McShane dalam I jika $I_j \subset I$, untuk $j = 1, \ldots, p$. Sistem McShane $\{(I_j, t_j) : j = 1, \ldots, p\}$ dalam I disebut partisi McShane dari I jika berlaku $\bigcup_{j=1}^{p} I_j = I$. Diberikan fungsi positif $\delta : I \to (0, \infty)$, maka interval dengan titik terkait (I, t) dikatakan subordinat terhadap δ jika $J \subset B(t, \delta(t))$, dengan $B(t, \delta(t))$ adalah bola buka di R^m dengan pusat titik t dan jari-jari $\delta(t)$. Suatu partisi McShane $\{(I_j, t_j) : j = 1, \ldots, p\}$ dari I dikatakan subordinat terhadap δ jika interval (I_j, t_j) subordinat terhadap δ untuk setiap $j = 1, \ldots, p$.

Eksistensi partisi McShane yang subordinat terhadap suatu fungsi positif diberikan oleh Lema Cousin.

Lema 1. (*Lema Cousin*). *Untuk setiap fungsi positif $\delta : I \to (0, \infty)$ terdapat partisi McShane yang subordinat terhadap δ dari I.*

(Lihat Gordon, 1994; Henstock, 1991; atau Yee, 2000).

Sekarang diberikan definisi integral McShane fungsi bernilai Banach.

Definisi 2. *Diberikan interval kompak $I \subset R^m$ dan ruang Banach X. Fungsi $f : I \to X$ dikatakan terintegral McShane pada I dengan $A \in X$ adalah nilai integralnya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif $\delta : I \to (0, \infty)$ sehingga berlaku $\left\| \sum_{j=1}^{p} f(t_j)\mu(I_j) - A \right\| < \varepsilon$, untuk setiap partisi McShane $\{(I_j, t_j) : j = 1, \ldots, p\}$ yang subordinat terhadap δ dari I.*

Di sini μ menyatakan ukuran luar Lebesgue. Nilai integral fungsi f pada I tersebut ditulis $A = (M)\int_I f$. Jika diberikan himpunan $E \subset I$, fungsi f dikatakan terintegral

McShane pada E jika fungsi $f.\chi_E : I \to X$ terintegral McShane pada I. Notasi χ_E menyatakan fungsi karakteristik dari himpunan E.

Selanjutnya diperhatikan sifat-sifat dasar dari integral McShane fungsi bernilai Banach.

Teorema 3. *Diberikan fungsi $f : I \to X$. Jika $f = 0$ hampir dimana-mana pada I maka f terintegral McShane pada I dan $(M)\int_I f = 0$.*

Bukti: Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Tulis $N = \{t \in I : f(t) \neq 0\}$ dan untuk setiap $n \in N$ didefinisikan $N_n = \{t \in N : n-1 \le \|f(t)\| < n\}$. Karena $\mu(N) = 0$ maka $\mu(N_n) = 0$ untuk setiap $n \in N$ dan akibatnya untuk setiap $n \in N$ terdapat himpunan terbuka G_n sehingga $N_n \subset G_n$ dan $\mu(G_n) < \dfrac{\varepsilon}{n2^n}$. Didefinisikan fungsi positif $\delta : I \to (0,\infty)$ sehingga $\delta(t) = 1$ jika $t \in I \setminus N$, dan $B(t,\delta(t)) \subset G_n$ jika $t \in N_n$. Misalkan $\{(I_j, t_j) : j = 1,\ldots, p\}$ partisi McShane yang subordinat terhadap δ dari I maka

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{p} f(t_j)\mu(I_j)\right\| &\le \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1,\,t_j\in N_n}^{p} f(t_j)\mu(I_j)\right\| \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sum_{j=1,\,t_j\in N_n}^{p} f(t_j)\mu(I_j)\right\| \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{j=1,\,t_j\in N_n}^{p} \mu(I_j) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\varepsilon}{n2^n} \\ &= \varepsilon .\end{aligned}$$

Jadi terbukti f terintegral McShane pada I dan $(M)\int_I f = 0$. ■

Teorema berikut merupakan kriteria Cauchy untuk keterintegralan McShane fungsi bernilai Banach.

Teorema 4. *Fungsi $f : I \to X$ terintegral McShane pada I jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif $\delta : I \to (0,\infty)$ sehingga berlaku*

$$\left\|\sum_{j=1}^{p} f(t_j)\mu(I_j) - \sum_{i=1}^{r} f(s_i)\mu(J_i)\right\| < \varepsilon \qquad \text{…..(1)}$$

untuk setiap partisi McShane $\{(I_j, t_j) : j = 1, \ldots, p\}$ *dan* $\{(J_i, s_i) : i = 1, \ldots, r\}$ *yang subordinat terhadap* δ *dari* I *.*

Bukti: Jika f terintegral McShane pada I, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif $\delta : I \to (0, \infty)$ sehingga berlaku $\left\| \sum_{j=1}^{p} f(t_j)\mu(I_j) - (M)\int_I f \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$, untuk setiap partisi McShane $\{(I_j, t_j) : j = 1, \ldots, p\}$ yang subordinat terhadap δ dari I. Oleh karena itu berlaku

$$\left\| \sum_{j=1}^{p} f(t_j)\mu(I_j) - \sum_{i=1}^{r} f(s_i)\mu(J_i) < \varepsilon \right\| \le \left\| \sum_{j=1}^{p} f(t_j)\mu(I_j) - (M)\int_I f \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{r} f(s_i)\mu(J_i) - (M)\int_I f \right\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

untuk setiap partisi McShane $\{(I_j, t_j) : j = 1, \ldots, p\}$ dan $\{(J_i, s_i) : i = 1, \ldots, r\}$ yang subordinat terhadap δ dari I.

Sebaliknya, diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, tulis

$$S(\varepsilon) = \left\{ S(f, D) = \sum_{i=1}^{k} f(t_i)\mu(J_i) : D = \{(J_i, t_i) : i = 1, \ldots, k\} \right\} \subset X$$

dengan D sebarang partisi McShane yang subordinat terhadap δ dari I. Himpunan $S(\varepsilon) \subset X$ tidak kosong menurut Lema Cousin. Perhatikan bahwa karena berlaku hubungan (1) untuk setiap partisi McShane $\{(I_j, t_j) : j = 1, \ldots, p\}$ dan $\{(J_i, s_i) : i = 1, \ldots, r\}$ yang subordinat terhadap δ dari I, maka diperoleh $diam\, S(\varepsilon) < \varepsilon$ (di sini $diam\, S(\varepsilon)$ menyatakan diameter himpunan $S(\varepsilon)$ di dalam ruang Banach X). Lebih lanjut apabila $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ maka $S(\varepsilon_1) \subset S(\varepsilon_2)$ karena dapat dipilih fungsi positif δ_1 dan δ_2 yang berturut-turut berkorespondensi dengan ε_1 dan ε_2 sehingga $\delta_1(t) \le \delta_2(t)$, untuk $t \in I$. Jadi himpunan $\bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{S(\varepsilon)} = S_f \in X$ terdiri dari satu titik tunggal karena X ruang Banach ($\overline{S(\varepsilon)}$ menyatakan penutup/*closure* himpunan $S(\varepsilon)$ di dalam ruang Banach X). Untuk suatu jumlah integral $S(f, D)$ diperoleh $\left\| \sum_{i=1}^{k} f(t_i)\mu(J_i) - S_f \right\| < \varepsilon$, apabila $D = \{(J_i, t_i) : i = 1, \ldots, k\}$ sebarang partisi McShane yang subordinat terhadap δ dari I. Hal ini menunjukkan f terintegral McShane pada I. ■

Teorema 5. *Jika* $f : I \to X$ *terintegral McShane pada* I *dan* $J \subset I$ *suatu interval kompak, maka* f *terintegral McShane pada* J.

Bukti: Karena f terintegral McShane pada I maka berlaku kriteria Cauchy untuk keterintegralan. Ambil sebarang partisi McShane $\{(I_j, t_j) : j = 1, \ldots, p\}$ dan $\{(J_i, s_i) : i = 1, \ldots, q\}$ yang subordinat terhadap δ dari J. Himpunan $I \setminus J$ dapat dinyatakan sebagai gabungan berhingga dari interval-interval yang termuat dalam I. Ambil sebarang partisi McShane yang subordinat terhadap δ dari setiap interval tersebut, maka diperoleh suatu koleksi berhingga $\{(M_k, u_k) : k = 1, \ldots, r\}$ dari interval-interval dengan titik terkait yang mana bersama dengan $\{(I_j, t_j) : j = 1, \ldots, p\}$ dan $\{(J_i, s_i) : i = 1, \ldots, q\}$ membentuk dua partisi McShane yang subordinat terhadap δ dari I. Selisih dari jumlah integral yang berkorespondensi dengan dua partisi McShane yang subordinat terhadap δ dari I ini adalah $\sum_{j=1}^{p} f(t_j)\mu(I_j) - \sum_{i=1}^{q} f(s_i)\mu(J_i)$ (karena suku $\sum_{k=1}^{r} f(u_k)\mu(M_k)$ saling menghilangkan). Oleh karena itu menurut kriteria Cauchy berlaku $\left\| \sum_{j=1}^{p} f(t_j)\mu(I_j) - \sum_{i=1}^{q} f(s_i)\mu(J_i) \right\| < \varepsilon$. Dengan kata lain terbukti f terintegral McShane pada J. ■

Teorema selanjutnya menyatakan bahwa integral McShane ini bersifat aditif terhadap domain pengintegralannya.

Teorema 6. *Misalkan* $J, K \subset R^m$ *interval kompak sehingga* $J \cup K$ *juga merupakan interval di* R^m. *Jika* $f : J \cup K \to X$ *terintegral McShane pada masing-masing interval* J *dan* K, *maka* f *terintegral McShane pada* $J \cup K$. *Lebih lanjut, apabila* J *dan* K *tak saling tumpang tindih maka berlaku* $(M)\int_{J \cup K} f = (M)\int_J f + (M)\int_K f$.

Bukti: Diperhatikan untuk J dan K yang tak saling tumpang tindih dengan $F = J \cap K$ adalah sisi persekutuan dari kedua interval di R^m. Dari yang diketahui ada fungsi positif δ_1 pada J dan fungsi positif δ_2 pada K sehingga berlaku $\left\| \sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(J_i) - (M)\int_J f \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap partisi McShane $\{(J_i, t_i) : i = 1, \ldots, p\}$ yang subordinat terhadap δ_1 dari J, dan berlaku $\left\| \sum_{j=1}^{q} f(s_j)\mu(K_j) - (M)\int_K f \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap partisi McShane $\{(K_j, s_i) : i = 1, \ldots, q\}$ yang subordinat terhadap δ_2 dari K. Untuk $t \in J \setminus F$ didefinisikan $\delta_3(t) > 0$ sehingga $\delta_3(t) < d(t, F)$ dan hal yang sama untuk $t \in K \setminus F$ ($d(t, F)$ menyatakan jarak titik t ke himpunan F). Selanjutnya didefinisikan fungsi positif δ pada $J \cup K$ yaitu

$$\delta(t) = \begin{cases} \min\{\delta_1(t), \delta_3(t)\} & , t \in J \setminus F \\ \min\{\delta_1(t), \delta_2(t)\} & , t \in F \\ \min\{\delta_2(t), \delta_3(t)\} & , t \in K \setminus F. \end{cases}$$

Misalkan $\{(M_k, u_k) : k = 1, \ldots, r\}$ partisi McShane yang subordinat terhadap δ dari $J \cup K$. Diperhatikan interval dengan titik terkait $(M_k, u_k), k = 1, \ldots, r$ dimana $u_k \in F$, maka $(M_k \cap J, u_k)$ subordinat terhadap δ_1, $(M_k \cap K, u_k)$ subordinat terhadap δ_2, dan suku yang berkorespondensi di dalam jumlah integral adalah $f(u_k)\mu(M_k) = f(u_k)\mu(M_k \cap J) + f(u_k)\mu(M_k \cap K)$.

Sistem-sistem interval dengan titik terkait $\{(M_k, u_k) : u_k \in J,\ k = 1, \ldots, r\}$, $\{(M_k \cap J, u_k) : u_k \in F,\ k = 1, \ldots, r\}$ adalah partisi McShane yang subordinat terhadap δ_1 dari J, dan sistem-sistem interval dengan titik terkait $\{(M_k, u_k) : u_k \in K,\ k = 1, \ldots, r\}$, $\{(M_k \cap K, u_k) : u_k \in F,\ k = 1, \ldots, r\}$ adalah partisi McShane yang subordinat terhadap δ_2 dari K.

Dengan demikian diperoleh

$$
\begin{aligned}
&\left\| \sum_{k=1}^{r} f(u_k)\mu(M_k) - (M)\int_J f - (M)\int_K f \right\| \\
&= \Bigg\| \sum_{k=1,\,u_k \in J\setminus F}^{r} f(u_k)\mu(M_k) + \sum_{k=1,\,u_k \in F}^{r} f(u_k)\mu(M_k) + \sum_{k=1,\,u_k \in K\setminus F}^{r} f(u_k)\mu(M_k) - \\
&\qquad (M)\int_J f - (M)\int_K f \Bigg\| \\
&= \Bigg\| \sum_{k=1,\,u_k \in J\setminus F}^{r} f(u_k)\mu(M_k) + \sum_{k=1,\,u_k \in F}^{r} f(u_k)\big(\mu(M_k \cap J) + \mu(M_k \cap K)\big) + \sum_{k=1,\,u_k \in K\setminus F}^{r} f(u_k)\mu(M_k) \\
&\qquad - (M)\int_J f - (M)\int_K f \Bigg\| \\
&\le \Bigg\| \sum_{k=1,\,u_k \in J\setminus F}^{r} f(u_k)\mu(M_k) + \sum_{k=1,\,u_k \in F}^{r} f(u_k)\mu(M_k \cap J) - (M)\int_J f \Bigg\| + \\
&\qquad \Bigg\| \sum_{k=1,\,u_k \in F}^{r} f(u_k)\mu(M_k \cap K) + \sum_{k=1,\,u_k \in K\setminus F}^{r} f(u_k)\mu(M_k) - (M)\int_K f \Bigg\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon .
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti f terintegral McShane pada $J \cup K$ dan $(M)\int_{J\cup K} f = (M)\int_J f + (M)\int_K f$.

Kasus dimana interval J dan K saling tumpang tindih, yaitu $\mu(J \cap K) > 0$, dikerjakan dengan cara yang sama menggunakan kriteria Cauchy. ■

Sifat berikutnya menyatakan sifat kelinearan integral McShane fungsi bernilai Banach. Dengan kata lain koleksi semua fungsi bernilai Banach yang terintegral McShane merupakan ruang linear.

Teorema 7. *Diketahui* $f, g : I \to X$ *terintegral McShane pada* I *dan* $c \in R$. *Maka* $c.f + g$ *terintegral McShane pada* I *dan berlaku* $(M)\int_I (c.f + g) = c.(M)\int_I f + (M)\int_I g$, *untuk setiap bilangan real* c.

Bukti: Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan sebarang bilangan real c, maka dapat dicari fungsi positif δ_1 dan δ_2 pada I sehingga berlaku $\left\| \sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(J_i) - (M)\int_I f \right\| < \frac{\varepsilon}{2(|c|+1)}$, untuk setiap partisi McShane $\{(J_i, t_i) : i = 1, \ldots, p\}$ yang subordinat terhadap δ_1 dari I, dan berlaku $\left\|\sum_{i=1}^{p} g(t_i)\mu(J_i) - (M)\int_I g\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$, untuk setiap partisi McShane $\{(J_i,t_i) : i=1,\dots,p\}$ yang subordinat terhadap δ_2 dari I. Dipilih fungsi positif $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$, maka partisi McShane $\{(J_i,t_i) : i=1,\dots,p\}$ subordinat terhadap δ dan berlaku

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{i=1}^{p} (c.f+g)(t_i)\mu(J_i) - c.(M)\int_I f - (M)\int_I g\right\| \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{p} \big(c.f(t_i)+g(t_i)\big)\mu(J_i) - c.(M)\int_I f - (M)\int_I g\right\| \\
&= \left\|c.\sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(J_i) + \sum_{i=1}^{p} g(t_i)\mu(J_i) - c.(M)\int_I f - (M)\int_I g\right\| \\
&\le \left\|c.\sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(J_i) - c.(M)\int_I f\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{p} g(t_i)\mu(J_i) - (M)\int_I g\right\| \\
&= |c|.\left\|\sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(J_i) - (M)\int_I f\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{p} g(t_i)\mu(J_i) - (M)\int_I g\right\| \\
&< |c|.\frac{\varepsilon}{2\big(|c|+1\big)} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon .
\end{aligned}$$

Teorema terbukti . ■

Terakhir diberikan Lema Saks-Henstock yang mempunyai peran penting dalam teori integral, khususnya pada integral-integral tipe Riemann.

Teorema 8. (*Lema Saks-Henstock*). *Diketahui fungsi $f : I \to X$ terintegral McShane pada I. Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, misalkan δ adalah fungsi positif pada I sehingga $\left\|\sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(J_i) - (M)\int_I f\right\| < \varepsilon$, untuk setiap partisi McShane $\{(J_i,t_i) : i=1,\dots,p\}$ yang subordinat terhadap δ dari I. Jika $\{(K_j,r_j) : j=1,\dots,q\}$ adalah sistem McShane yang subordinat terhadap δ dalam I, maka berlaku*

$$\left\|\sum_{j=1}^{q}\left(f(r_j)\mu(K_j) - (M)\int_{K_j} f\right)\right\| < \varepsilon .$$

Bukti: Karena $\{(K_j, r_j) : j = 1, \dots, q\}$ adalah sistem McShane yang subordinat terhadap δ dalam I, maka $I \setminus \bigcup_{j=1}^{q} \operatorname{int} K_j$ terdiri dari berhingga sistem $M_l, l = 1, \dots, r$ dari interval-interval yang tak saling tumpang tindih dalam I. Fungsi f terintegral McShane pada I dan oleh karenanya $(M)\int_{M_l} f$ ada dan menurut definisi untuk sebarang $\eta > 0$ ada fungsi positif δ_l pada M_l dengan $\delta_l(t) < \delta(t)$ untuk $t \in M_l$ sehingga untuk setiap $l = 1, \dots, r$ berlaku $\left\| \sum_{i=1}^{k_l} f(s_i^l)\mu(N_i^l) - (M)\int_{M_l} f \right\| < \frac{\eta}{r+1}$ dengan $\{(N_i^l, s_i^l) : i = 1, \dots, k_l\}$ adalah partisi McShane yang subordinat terhadap δ_l dari M_l. Jumlahan $\sum_{j=1}^{q} f(r_j)\mu(K_j) + \sum_{l=1}^{r}\sum_{i=1}^{k_l} f(s_i^l)\mu(N_i^l)$ menyatakan suatu jumlah integral yang berkorespondensi terhadap suatu partisi McShane yang subordinat terhadap δ dari I, dan akibatnya $\left\| \sum_{j=1}^{q} f(r_j)\mu(K_j) + \sum_{l=1}^{r}\sum_{i=1}^{k_l} f(s_i^l)\mu(N_i^l) - (M)\int_I f \right\| < \varepsilon$.

Dengan demikian berlaku

$$
\begin{aligned}
&\left\| \sum_{j=1}^{q} \left(f(r_j)\mu(K_j) - (M)\int_{K_j} f \right) \right\| \\
&\le \left\| \sum_{j=1}^{q} f(r_j)\mu(K_j) + \sum_{l=1}^{r}\sum_{i=1}^{k_l} f(s_i^l)\mu(N_i^l) - (M)\int_I f \right\| + \sum_{l=1}^{r} \left\| \sum_{i=1}^{k_l} f(s_i^l)\mu(N_i^l) - (M)\int_{M_l} f \right\| \\
&< \varepsilon + r.\frac{\eta}{r+1} \\
&< \varepsilon + \eta \ .
\end{aligned}
$$

Karena pengambilan $\eta > 0$ sebarang maka terbuktilah pernyataan pada teorema di atas.

■

III. Penutup

Telah dibicarakan suatu integral tipe Riemann yang dikenal sebagai integral McShane untuk fungsi yang terdefinisi pada interval kompak di R^m dan bernilai pada ruang Banach. Pembahasan meliputi sifat-sifat dasar dari integral ini yaitu kriteria Cauchy untuk keterintegralan, sifat kelinearan, dan lema Saks-Henstock, dan diperoleh hasil yang sejalan dengan pembahasan integral McShane fungsi bernilai real yang terdefinisi pada interval kompak di R .

IV. Daftar Pustaka

[1] Bartle, R.G. (2001). *A Modern Theory of Integration*. Grad. Stud. Math. 32, American Mathematical Society, Providence.

[2] Gordon, R.A. (1994). *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. Grad. Stud. Math. 4, American Mathematical Society, Providence.

[3] Henstock, R. (1991). *The General Theory of Integration*. Oxford: Clarendon Press.

[4] Kurzweil, J. & Schwabik, S. (2004). McShane Integrability and Vitali's Convergence Theorem. *Mathematica Bohemica 129* , 141-157.

[5] Ye, G. & Schwabik, S. (2001). The McShane and The Weak McShane Integrals of Banach Space-valued Functions defined on R^m . *Mathematical Notes (Miskolc) 2*, 127-136.

[6] Ye, G. & Schwabik, S. (2005). *Topics in Banach Space Integration*. Singapore: World Scientific.

[7] Yee, L.P. & Vyborny, R. (2000). *The Integral: An Easy Approach after Kurzweil and Henstock*. Cambridge: Cambridge University Press.